Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Locală -28 februarie 2015- Maramureş

variant 1 – Clasa a XII-a

1. Pentru $x, y \in G = (1,3)$ definim $x * y = \frac{2xy-3x-3y+6}{xy-2x-2y+5}$.

   a) Arătaţi G este parte stabilă în raport cu „$*$ ".
   b) Presupunând că $(G,*)$ este grup abelian arătaţi că $(G,*) \cong (R_+^*, \ \cdot)$.
   c) Dacă $n \in N, n \geq 2,$ calculaţi $E_n = \frac{13}{7} * \frac{33}{17} * \dots * \frac{4n^2-3}{2n^2-1}$.

R.M.T. 1/2015(Enunţ modificat)

2 . Fie $(G,\cdot)$ un grup şi mulţimea $Z(G) = \{x \in G | xy = yx, \forall y \in G\}$. Dacă $x^2 = e$, pentru orice $x \in G - Z(G)$, atunci G este comutativ.

Gazeta Matematică nr. 12 / 2014

3. Să se determine primitiva F a funcţiei

$$f\colon\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) \to R, f(x) = \frac{sinx}{1 + sin2x}$$

cu proprietatea $F(0) = \frac{1+\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}-1)}{2}$.

Gheorghe Szollosy

4. Să se determine funcţiile $f\colon R \to R$ derivabile, cu $f(0) \neq 0$, care verifică

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{x}{2}(f(x) + f(0)), \forall\, x \in R.$$

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.
Subiecte selectate şi prelucrate de:

prof. Pop Vesel Floare, Lic. Bogdan Vodă, Vişeu de Sus
prof. Gherasin Gheorghe, Lic. Regele Ferdinand, Sighetu-M.
prof. Giurgi Vasile, C.N. Dragoş Vodă, Sighetu-M.

Clasa a XII-a **barem**

1. Pentru $x, y \in G = (1, 3)$ definim $x * y = \frac{2xy-3x-3y+6}{xy-2x-2y+5}$.

a) Arătaţi G este parte stabilă în raport cu „$*$ ".

b) Presupunând că $(G,*)$ este grup abelian arătaţi că $(G,*) \cong (R_+^*, \ \cdot)$.

c) Dacă $n \in N, n \geq 2,$ calculaţi $E_n = \frac{13}{7} * \frac{33}{17} * \dots * \frac{4n^2-3}{2n^2-1}$.

Barem de corectare

a) Prin calcul direct $1 < x * y < 3, \forall\, x, y \in (1, 3)$ …. . **2p**

b) Demonstraţia că $f: (1, 3) \to R_+^{,*}, f(x) = \frac{3-x}{x-1}$ este izomorfism de grupuri.......**3p**

c) $f(E_n) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2}{k^2-1}$....**1p**. Finalizare **1p**.

2. Fie $(G,\cdot)$ un grup şi mulţimea $Z(G) = \{x \in G | xy = yx, \forall y \in G\}$. Dacă $x^2 = e$, pentru orice $x \in G - Z(G)$, atunci G este comutativ.

Barem de corectare

Demonstrăm că $xy = yx, \forall x, y \in G$.

Dacă $x, y \in \mathrm{Z(G)}$atunci $\mathrm{xy} = \mathrm{yx}$ …. **1p**.

Dacă $x \in \mathrm{Z(G)}, \mathrm{y} \in \mathrm{G}$ atunci $\mathrm{xy} = \mathrm{yx}$ (elementele din $\mathrm{Z(G)}$comută cu orice element din G) …. **1p**.

Dacă $x, y \in G - Z(G) \Rightarrow x^2 = e, y^2 = e \Rightarrow x^{-1} = x \in G - Z(G)$ şi $y^{-1} = y \in G - Z(G)$....**1p**

Avem

1) Dacă $yx \in G - Z(G) \Rightarrow (yx)^2 = e \Rightarrow yx = (yx)^{-1}$ şi $xy = x^{-1}y^{-1} = (yx)^{-1} \Rightarrow xy = yx$.......**2p**
2) Dacă $yx \notin G - Z(G) \Rightarrow yx \in Z(G) \Rightarrow yx = h \in Z(G) \Rightarrow x = y^{-1}h = yh = hy$. Avem $xy = yhy = xy \Rightarrow$ $xy = yx$ **2p**

Deci $xy = yx, \forall x, y \in G$.

3. Să se determine primitiva F a funcţiei

$$f: \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) \to R, f(x) = \frac{sinx}{1 + sin2x}$$

cu proprietatea $F(0) = \frac{1+\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}-1)}{2}$.

Barem de corectare

Considerarea funcţiei $G(x) = \int \frac{cosx}{(sinx+cosx)^2} dx, x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ **1p**

Avem $F(x) - G(x) = \frac{1}{sinx+cosx} + C_1, F(x) + G(x) = \int \frac{dx}{sinx+cosx}$.....**2p**

Integrala a doua se calculează prin substituţia $tg\frac{x}{2} = t \in (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ şi se obţine $F(x) + G(x)$=

$\frac{1}{\sqrt{2}} ln \frac{tg\frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}}{1+\sqrt{2} - tg\frac{x}{2}} + C_2$........**2p**. Aflarea primitivei F şi folosirea condiţiei din enunţ ne conduc la

$F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{sinx+cosx} + \frac{1}{\sqrt{2}} ln \frac{tg\frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}}{1+\sqrt{2} - tg\frac{x}{2}}\right)$.....**2p**

4. Să se determine funcţiile $f: R \to R$ derivabile, cu $f(0) \neq 0$, care verifică

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{x}{2}(f(x) + f(0)), \forall\, x \in R.$$

Barem de corectare

Prin derivarea relaţiei se obţine $f(x) = f(0) + x f'(x), \forall x \in R$ ......**2p**. Pentru $x \neq 0$ avem

$x f'(x) - f(x) = -f(0) \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = -\frac{f(0)}{x^2}$ ..... **1p** .Conform consecinţei lui Lagrange avem

$$\frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \frac{f(0)}{x} + c_1, & x < 0 \\ \frac{f(0)}{x} + c_2, & x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} f(0) + c_1 x, & x < 0 \\ f(0) + c_2 x, & x > 0 \end{cases}$$ .....**2p**.

Folosind derivabilitatea funcţiei se obţine formula $f(x) = f(0) + f'(0)x, \forall x \in R$. **2p**